

---

# Verlässliche Systemsoftware

## Verifikation funktionaler Eigenschaften – Design by Contract

**Peter Ulbrich**

Lehrstuhl für Informatik 12 – Arbeitsgruppe Systemsoftware

Technische Universität Dortmund

<https://sys.cs.tu-dortmund.de>

KW50 2021



# Übersicht der heutigen Vorlesung

---

- Verifikation **funktionaler** Eigenschaften: **Design-by-Contract**
  - Grundlage: Zusagen in Form von **Vor- und Nachbedingungen**
  - Wie beschreibt man diese **Verträge**?
  - Wie leitet man daraus Korrektheitsaussagen ab?  $\rightsquigarrow$  **Hoare- / WP-Kalkül**
  
- Beschreibung von Verträgen mit Hilfe von **Annotationen**
  - Beispielsweise durch eine Erweiterung der Programmiersprache
  - Überprüft mithilfe eines Verifikationswerkzeugs
  
- 👉 Entwickeln eines **groben Verständnisses**
  - Wieso ist formale Verifikation immer noch ein Problem?
  - Umsetzung geht weit über den Umfang der Vorlesung/Übung



- 1 Grundlagen
- 2 Formale Spezifikation
  - Hoare-Kalkül
  - WP-Kalkül
- 3 Praktische Überlegungen
  - Zusicherungen
  - Funktionale Verifikation in Astreé
  - Formale Verifikation von Betriebssystemen: seL4
- 4 Zusammenfassung

- Diese Programm enthält diverse Fehler ...
  - Division durch 0, undefinierte Speicherzugriffe, Ganzzahlüberlauf

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size)  
3 {  
4     unsigned int temp = 0;  
5  
6     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
7         temp += array[i];  
8     }  
9  
10    return temp/size;  
11 }
```

 **Abstrakte Interpretation** deckt diese Defekte auf

- Intervallanalyse erfasst z.B.
  - Den Wert 0 für size ...
  - Oder den möglichen Überlauf von temp

```
1 unsigned int average(unsigned int[16] array) {
2     unsigned long long temp = 0;
3
4     for(unsigned int i = 0; i < 16; i++) {
5         temp += array[i];
6     }
7
8     return temp/20;
9 }
```



Wir können diese Fehler beheben!

- Zumindest für Spezialfälle ist dies offensichtlich

```
1 unsigned int average(unsigned int[16] array) {
2     unsigned long long temp = 0;
3
4     for(unsigned int i = 0; i < 16; i++) {
5         temp += array[i];
6     }
7
8     return temp/20;
9 }
```



Wir können diese Fehler beheben!

- Zumindest für Spezialfälle ist dies offensichtlich



**Aber:** Ist diese Implementierung korrekt?

- Mit Sicherheit nicht  $\rightsquigarrow$  sie liefert einen vollkommen falschen Wert
- Wir müssen beschreiben, was wir von `average()` erwarten!



Berechnet Durchschnittswert aller Elemente des Felds `array`

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     for(unsigned int i = 0;i < size;i++) {  
5         temp += array[i];  
6     }  
7     return temp/size;  
8 }
```





Berechnet Durchschnittswert aller Elemente des Felds `array`

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
5         temp += array[i];  
6     }  
7     return temp/size;  
8 }
```

■ **Nachbedingung** der Funktion `average()`

- Sie wird durch die Implementierung der Funktion garantiert
- Aufrufer von `average()` kann diese Nachbedingung **ausnutzen**



# Beschreibung der Programmsemantik

Gemäß der funktionalen Spezifikation der Funktion



Berechnet Durchschnittswert aller Elemente des Felds `array`



**Annahmen** des Entwicklers und **Forderungen** an den **Aufrufer** (engl. *caller*)

- Feld `array` hat **genau** `size` **korrekt initialisierte** Elemente
- Summe aller Elemente passt in `temp`  $\mapsto$  `sum(array, size) <= ULONG_MAX`

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
5         temp += array[i];  
6     }  
7     return temp/size;  
8 }
```

■ **Nachbedingung** der Funktion `average()`

- Sie wird durch die Implementierung der Funktion garantiert
- Aufrufer von `average()` kann diese Nachbedingung **ausnutzen**



# Beschreibung der Programmsemantik

Gemäß der funktionalen Spezifikation der Funktion

 Berechnet Durchschnittswert aller Elemente des Felds array

 **Annahmen** des Entwicklers und **Forderungen** an den **Aufrufer** (engl. *caller*)

- Feld array hat **genau** size **korrekt initialisierte** Elemente
- Summe aller Elemente passt in temp  $\mapsto$  `sum(array, size) <= ULONG_MAX`

## ■ **Vorbedingungen** der Funktion `average()`

- Aufrufer von `average` muss diese **sicherstellen**

→ Die Implementierung der Funktion kann sie ausnutzen

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
5         temp += array[i];  
6     }  
7     return temp/size;  
8 }
```

## ■ **Nachbedingung** der Funktion `average()`

- Sie wird durch die Implementierung der Funktion garantiert

→ Aufrufer von `average()` kann diese Nachbedingung **ausnutzen**



```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
5         temp += array[i];  
6     }  
7     return temp/size;  
8 }
```



temp ist nie größer als die Summe der Elemente in array

- $\sum \text{array}[0..i] \geq \text{temp}, \forall i < \text{size}$

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
5         temp += array[i];  
6     }  
7     return temp/size;  
8 }
```

 temp ist nie größer als die Summe der Elemente in array

- $\sum \text{array}[0..i] \geq \text{temp}, \forall i < \text{size}$



**Invarianten** der Funktion average ( )

- Bedingungen die ihre Gültigkeit während der (gesamten) Ausführung behalten
- Von großem Nutzen für die Beweisführung!

# Invarianten – Ein illustratives Beispiel



## Das MU-Puzzle<sup>1</sup> [8]:

- **Annahme:** Es gibt drei Symbole: M, I, U, **Startpunkt:** MI
- In jedem Schritt ist eine der folgenden **Regeln** anzuwenden:

- |   |       |       |                                       |                 |
|---|-------|-------|---------------------------------------|-----------------|
| 1 | xI    | → xIU | : Füge U an, falls String auf I endet | (MI → MIU)      |
| 2 | Mx    | → Mxx | : Verdopple die Zeichenkette nach M   | (MIU → MIUIU)   |
| 3 | xIIIy | → xUy | : Ersetze III durch U                 | (MUIIIU → MUUU) |
| 4 | xUy   | → xy  | : Lösche beliebige UU                 | (MUUU → MU)     |

<sup>1</sup>Video der Vorlesung: <http://ocw.mit.edu/high-school/humanities-and-social-sciences/godel-escher-bach/video-lectures/lecture-1-video/>



# Invarianten – Ein illustratives Beispiel



## Das MU-Puzzle<sup>1</sup> [8]:

- **Annahme:** Es gibt drei Symbole: M, I, U, **Startpunkt:** MI
- In jedem Schritt ist eine der folgenden **Regeln** anzuwenden:

- 1  $xI \rightarrow xIU$  : Füge U an, falls String auf I endet (MI  $\rightarrow$  MIU)
- 2  $Mx \rightarrow Mxx$  : Verdopple die Zeichenkette nach M (MIU  $\rightarrow$  MIUIU)
- 3  $xIIIy \rightarrow xUy$  : Ersetze III durch U (MUIIIU  $\rightarrow$  MUUU)
- 4  $xUUy \rightarrow xy$  : Lösche beliebige UU (MUUU  $\rightarrow$  MU)

- **Frage:** Ist die Zeichenkette MI überführbar in MU?

<sup>1</sup>Video der Vorlesung: <http://ocw.mit.edu/high-school/humanities-and-social-sciences/godel-escher-bach/video-lectures/lecture-1-video/>



# Invarianten – Ein illustratives Beispiel



Das MU-Puzzle<sup>1</sup> [8]:

- **Annahme:** Es gibt drei Symbole: M, I, U, **Startpunkt:** MI
- In jedem Schritt ist eine der folgenden **Regeln** anzuwenden:

- 1  $xI \rightarrow xIU$  : Füge U an, falls String auf I endet (MI  $\rightarrow$  MIU)
- 2  $Mx \rightarrow Mxx$  : Verdopple die Zeichenkette nach M (MIU  $\rightarrow$  MIUIU)
- 3  $xIIIy \rightarrow xUy$  : Ersetze III durch U (MUIIIU  $\rightarrow$  MUUU)
- 4  $xUUy \rightarrow xy$  : Lösche beliebige UU (MUUU  $\rightarrow$  MU)

- **Frage:** Ist die Zeichenkette MI überführbar in MU?



Der formale (logische) Beweis ist ein kniffliges Problem

- Vor- und Nachbedingungen sind nicht ausreichend
  - Abstrakte Interpretation versagt hier ebenfalls (vgl. ab-Problem VIII/32)
- Manuelle Ableitung oft der einzige (mühsame) Ausweg!

<sup>1</sup>Video der Vorlesung: <http://ocw.mit.edu/high-school/humanities-and-social-sciences/godel-escher-bach/video-lectures/lecture-1-video/>



# Invarianten – Ein illustratives Beispiel



Das MU-Puzzle<sup>1</sup> [8]:

- **Annahme:** Es gibt drei Symbole: M, I, U, **Startpunkt:** MI
- In jedem Schritt ist eine der folgenden **Regeln** anzuwenden:

- 1  $xI \rightarrow xIU$  : Füge U an, falls String auf I endet (MI  $\rightarrow$  MIU)
- 2  $Mx \rightarrow Mxx$  : Verdopple die Zeichenkette nach M (MIU  $\rightarrow$  MIUIU)
- 3  $xIIIy \rightarrow xUy$  : Ersetze III durch U (MUIIIU  $\rightarrow$  MUUU)
- 4  $xUUy \rightarrow xy$  : Lösche beliebige UU (MUUU  $\rightarrow$  MU)

- **Frage:** Ist die Zeichenkette MI überführbar in MU?



Der formale (logische) Beweis ist ein kniffliges Problem

- Vor- und Nachbedingungen sind nicht ausreichend
  - Abstrakte Interpretation versagt hier ebenfalls (vgl. ab-Problem VIII/32)
- Manuelle Ableitung oft der einzige (mühsame) Ausweg!



**Invariante:** Die Zahl der Is ist kein Vielfaches von 3  $\leadsto$  **NEIN!**

<sup>1</sup>Video der Vorlesung: <http://ocw.mit.edu/high-school/humanities-and-social-sciences/godel-escher-bach/video-lectures/lecture-1-video/>





## Zusicherungen (engl. *assertions*)

- Regeln das Verhältnis zwischen **Aufrufer** und **Gerufenem** (engl. *callee*)

# Formales System zur Beschreibung einer Funktion

---



Zusicherungen (engl. *assertions*)

- Regeln das Verhältnis zwischen **Aufrufer** und **Gerufenem** (engl. *callee*)

**P** Vorbedingungen (engl. *preconditions*)

- Werden vom **Aufrufer erfüllt**, in der **Funktion genutzt**



# Formales System zur Beschreibung einer Funktion

---

- ☞ **Zusicherungen** (engl. *assertions*)
  - Regeln das Verhältnis zwischen **Aufrufer** und **Gerufenem** (engl. *callee*)
- P** **Vorbedingungen** (engl. *preconditions*)
  - Werden vom **Aufrufer erfüllt**, in der **Funktion genutzt**
- Q** **Nachbedingungen** (engl. *postconditions*)
  - Werden vom **Gerufenem erfüllt**, vom **Aufrufer genutzt**
- ⚠ Unter der Bedingung, dass die Vorbedingungen gelten



# Formales System zur Beschreibung einer Funktion

- ☞ **Zusicherungen** (engl. *assertions*)
  - Regeln das Verhältnis zwischen **Aufrufer** und **Gerufenem** (engl. *callee*)
- P** **Vorbedingungen** (engl. *preconditions*)
  - Werden vom **Aufrufer erfüllt**, in der **Funktion genutzt**
- Q** **Nachbedingungen** (engl. *postconditions*)
  - Werden vom **Gerufenem erfüllt**, vom **Aufrufer genutzt**
  - ⚠ Unter der Bedingung, dass die Vorbedingungen gelten
- I** **Invarianten** (engl. *invariants*)
  - Gelten sowohl **vor** als auch **nach** dem Funktionsaufruf
  - ⚠ Eine zwischenzeitliche Verletzung innerhalb der Prozedur wird toleriert



# Formales System zur Beschreibung einer Funktion

- ➔** **Zusicherungen** (engl. *assertions*)
  - Regeln das Verhältnis zwischen **Aufrufer** und **Gerufenem** (engl. *callee*)
- P** **Vorbedingungen** (engl. *preconditions*)
  - Werden vom **Aufrufer erfüllt**, in der **Funktion genutzt**
- Q** **Nachbedingungen** (engl. *postconditions*)
  - Werden vom **Gerufenem erfüllt**, vom **Aufrufer genutzt**
  - ⚠ Unter der Bedingung, dass die Vorbedingungen gelten
- I** **Invarianten** (engl. *invariants*)
  - Gelten sowohl **vor** als auch **nach** dem Funktionsaufruf
  - ⚠ Eine zwischenzeitliche Verletzung innerhalb der Prozedur wird toleriert
- S** **Anweisungen** (engl. *statements*)  $\mapsto$  Programmsegment
  - Beschreiben die **Implementierung** der Funktion
  - ⚠ Formal beschrieben oder durch statische Analyse ermittelt



# Formales System zur Beschreibung einer Funktion

- ☞ **Zusicherungen** (engl. *assertions*)
- Regeln das Verhältnis zwischen **Aufrufer** und **Gerufenem** (engl. *callee*)

- P** **Vorbedingungen** (engl. *preconditions*)
- Werden vom **Aufrufer erfüllt**, in der **Funktion genutzt**

- Q** **Nachbedingungen** (engl. *postconditions*)
- Werden vom **Gerufenem erfüllt**, vom **Aufrufer genutzt**
- ⚠ Unter der Bedingung, dass die Vorbedingungen gelten

- I** **Invarianten** (engl. *invariants*)
- Gelten sowohl **vor** als auch **nach** dem Funktionsaufruf
- ⚠ Eine zwischenzeitliche Verletzung innerhalb der Prozedur wird toleriert

- S** **Anweisungen** (engl. *statements*)  $\mapsto$  Programmsegment
- Beschreiben die **Implementierung** der Funktion
- ⚠ Formal beschrieben oder durch statische Analyse ermittelt

- ☞ **Ableitbarkeit** zeigt die formale Korrektheit der Funktion

- $P \wedge I \wedge S \Rightarrow Q \wedge I$



# Überprüfung der Zusicherungen?

---

- Das Programmsegment  $S$  implementiert eine Transformation zwischen der Vorbedingung  $P$  und der Nachbedingung  $Q$ 
  - Entsprechende Transformationen existieren für alle Programmkonstrukte
  - Zuweisungen, Sequenzen, Verzweigungen, Schleifen, Funktionsaufrufe, ...
- **Aufgabe:** Zusammenbringen von  $P$ ,  $S$  und  $Q$



# Überprüfung der Zusicherungen?

- Das Programmsegment  $S$  implementiert eine Transformation zwischen der Vorbedingung  $P$  und der Nachbedingung  $Q$ 
  - Entsprechende Transformationen existieren für alle Programmkonstrukte
  - Zuweisungen, Sequenzen, Verzweigungen, Schleifen, Funktionsaufrufe, ...
- **Aufgabe:** Zusammenbringen von  $P$ ,  $S$  und  $Q$

## Prädikattransformation (engl. *predicate transformer semantics*)

- Stellt Strategien bereit, um Hoare-Triple  $\{P\} S \{Q\}$  zu beweisen
- Eine **Vorwärtsanalyse** liefert die **stärkste Nachbedingung** (engl. *strongest postcondition*)  $sp(S, P)$ 
  - $\{P\} S \{Q\}$  gilt, genau dann wenn  $sp(S, P) \Rightarrow Q$  wahr ist
- Eine **Rückwärtsanalyse** liefert die **schwächste Vorbedingung** (engl. *weakest precondition*)  $wp(S, Q)$ 
  - $\{P\} S \{Q\}$  gilt, genau dann wenn  $P \Rightarrow wp(S, Q)$  wahr ist

## Basiert auf dem **Hoare-** (siehe 12 ff) / **WP-Kalkül** (siehe 24 ff)

- Beschreibt die (formale) **Funktionssemantik** eines Programms



## 1 Grundlagen

## 2 Formale Spezifikation

- Hoare-Kalkül
- WP-Kalkül

## 3 Praktische Überlegungen

- Zusicherungen
- Funktionale Verifikation in Astaré
- Formale Verifikation von Betriebssystemen: seL4

## 4 Zusammenfassung



# Sir Charles Anthony Richard (C.A.R.) Hoare

Ein Informatik-Pionier: Leben und Wirken



- 1934 geboren in Colombo, Sri Lanka
- ab 1956 Studium in Oxford und Moskau
- ab 1960 Elliot Brothers
- 1968 Habilitation an der Queen's University of Belfast
- ab 1977 Professor für Informatik (Oxford)

## Auszeichnungen (Auszug)

- 1980 Turing Award
- 2000 Kyoto-Preis
- 2007 Friedrich L. Bauer Preis
- 2010 John-von-Neumann-Medaille

## bekannte Werke (Auszug)

- Quicksort-Algorithmus [5]
- Hoare-Kalkül [6]
- Communicating Sequential Processes [7]



- Ein **formales System**, um Aussagen zur Korrektheit von Programmen zu treffen, die in imperativen Programmiersprachen verfasst sind.
- Das Hoare-Kalkül umfasst **Axiome** ...
  - Leere Anweisungen
  - Zuweisungen
- ... und **Ableitungsregeln** (bzw. **Inferenzregeln**)
  - Sequenzen (bzw. Komposition) von Anweisungen
  - Auswahlen von Anweisungen
  - Iterationen von Anweisungen und
  - Konsequenz



Ist **nicht vollständig** und bezieht sich nur auf die **partielle Korrektheit**



# Definition von Zusicherungen

- Zusicherungen werden als Formeln der **Prädikatenlogik** beschrieben

☞ Üblicherweise definiert als sogenannte **Hoare-Triple**:

$$\{P\} S \{Q\}$$

- $P$  ist die Vorbedingung,  $Q$  die Nachbedingung,  $S$  ein Programmsegment
- $P$  und  $Q$  werden als Formeln der Prädikatenlogik beschrieben
- Bedeutung: Falls  $P$  vor der Ausführung von  $S$  gilt, gilt  $Q$  danach
  - Dies setzt voraus, **dass  $S$  terminiert**
  - Sonst ist keine Aussage über den folgenden Programmzustand möglich
- ⚠ **Partielle Korrektheit:** Die Terminierung muss gesondert bewiesen werden
  - Man verwendet  $\{P\} S \{falsch\}$  um auszudrücken, dass  $S$  nicht terminiert
  - Nachweis möglich in Echtzeitsystemen (WCET-Analyse)



```
S:int maximum(int a,int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return result;  
}
```

- Das Programmsegment S ist die Implementierung der Funktion

## Beispiel: Maximum-Funktion

$P$  : wahr

```
S: int maximum(int a, int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return result;  
}
```

- Das Programmsegment  $S$  ist die Implementierung der Funktion
- Vorbedingung  $P$  : **wahr**  
→ Die Implementierung stellt keine Anforderungen an die Parameter



## Beispiel: Maximum-Funktion

$P$  : wahr

```
S: int maximum(int a, int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return result;  
}
```

$Q$  :  $result \geq a \wedge result \geq b$

- Das Programmsegment  $S$  ist die Implementierung der Funktion
- Vorbedingung  $P$  : **wahr**
  - Die Implementierung stellt keine Anforderungen an die Parameter
- Nachbedingung  $Q$  :  $result \geq a \wedge result \geq b$ 
  - „Offensichtliche“ Eigenschaft des zu berechnenden Ergebnisses



## Beispiel: Maximum-Funktion

$P$  : wahr

```
S: int maximum(int a, int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return result;  
}
```

$Q$  :  $result \geq a \wedge result \geq b$

- Das Programmsegment  $S$  ist die Implementierung der Funktion
- Vorbedingung  $P$  : **wahr**
  - Die Implementierung stellt keine Anforderungen an die Parameter
- Nachbedingung  $Q$  :  $result \geq a \wedge result \geq b$ 
  - „Offensichtliche“ Eigenschaft des zu berechnenden Ergebnisses
  - Wie man dieses Ergebnis bestimmt, ist hier nicht von Belang



- Leere Anweisung **skip**

$$\frac{}{\{P\}\mathbf{skip}\{P\}}$$

- Die leere Anweisung verändert den Programmzustand nicht
- Falls  $P$  vor **skip** gilt, gilt es auch danach

## ■ Leere Anweisung **skip**

$$\frac{}{\{P\}\mathbf{skip}\{P\}}$$

- Die leere Anweisung verändert den Programmzustand nicht
- Falls  $P$  vor **skip** gilt, gilt es auch danach

## ■ Zuweisung $\mathbf{x = y}$

$$\frac{}{\{P[y/x]\}\mathbf{x = y}\{P\}}$$

- $P[y/x] \rightsquigarrow$  jedes Auftreten von  $x$  in  $P$  wird durch  $y$  ersetzt
- was nach der Zuweisung für  $x$  gilt, galt vor der Zuweisung für  $y$
- Beispiel:  $\{y > 100\}\mathbf{x = y};\{x > 100\}$

$P : y > 100$

$S : \mathbf{x = y};$

$Q : x > 100$



# Sequenzregel

- Für lineare Kompositionen  $S_1; S_2$  zweier Segmente  $S_1$  und  $S_2$

$$\frac{\{P\}S_1\{Q\} \quad \{Q\}S_2\{R\}}{\{P\}S_1; S_2\{R\}}$$

- Falls  $S_1$  die Vorbedingung für  $S_2$  erzeugt, können sie verkettet werden
- Im Anschluss an  $S_2$  hat dessen Nachbedingung  $R$  Bestand



# Sequenzregel

- Für lineare Kompositionen  $S_1; S_2$  zweier Segmente  $S_1$  und  $S_2$

$$\frac{\{P\}S_1\{Q\} \quad \{Q\}S_2\{R\}}{\{P\}S_1; S_2\{R\}}$$

- Falls  $S_1$  die Vorbedingung für  $S_2$  erzeugt, können sie verkettet werden
  - Im Anschluss an  $S_2$  hat dessen Nachbedingung  $R$  Bestand
- Beispiel:

$$\frac{\{y + 1 = 43\}x = y + 1; \{x = 43\} \quad \{x = 43\}z = x; \{z = 43\}}{\{y + 1 = 43\}x = y + 1; z = x; \{z = 43\}}$$

$$P : y + 1 = 43$$

$$S_1 : x = y + 1;$$

$$Q : x = 43$$

$$Q : x = 43$$

$$S_2 : z = x;$$

$$R : z = 43$$

⊢

$$P : y + 1 = 43$$

$$S_1 : x = y + 1;$$

$$S_2 : z = x;$$

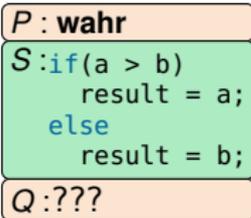
$$Q : z = 43$$



# Auswahlregel

Wie behandelt man Verzweigungen in if-else-Anweisungen?

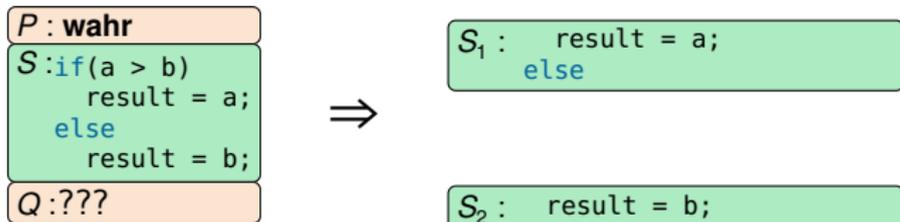
- Zwei alternative Programmsegmente  $S_1$  und  $S_2$



# Auswahlregel

Wie behandelt man Verzweigungen in if-else-Anweisungen?

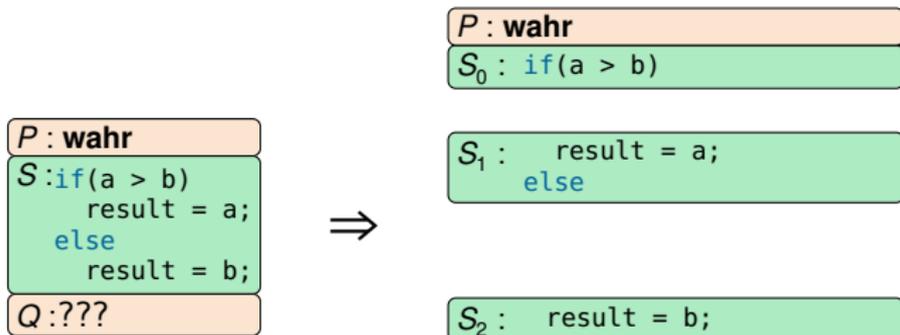
- Zwei alternative Programmsegmente  $S_1$  und  $S_2$ 
  - Diese werden durch eine Bedingung  $B$  unterschieden



# Auswahlregel

Wie behandelt man Verzweigungen in if-else-Anweisungen?

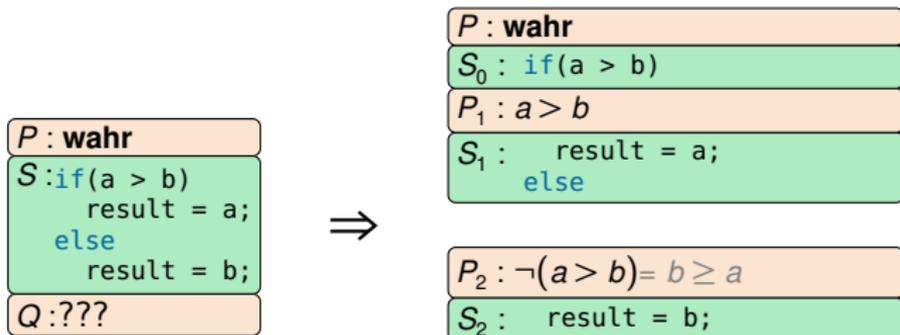
- Zwei **alternative Programmsegmente**  $S_1$  und  $S_2$ 
  - Diese werden durch eine **Bedingung**  $B$  unterschieden
  - Eingangs gilt in beiden Zweigen die Vorbedingung  $P$



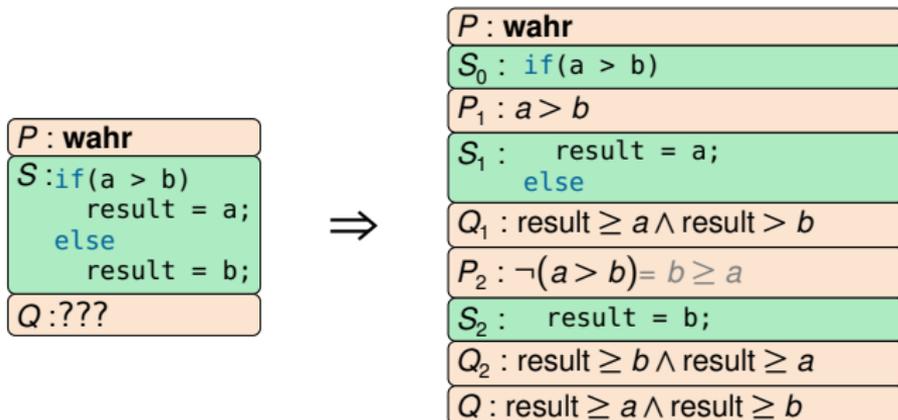
# Auswahlregel

Wie behandelt man Verzweigungen in if-else-Anweisungen?

- Zwei **alternative Programmsegmente**  $S_1$  und  $S_2$ 
  - Diese werden durch eine **Bedingung**  $B$  unterschieden
  - Eingangs gilt in beiden Zweigen die Vorbedingung  $P$ 
    - $P$  und  $B$  sind die Basis für die Vorbedingungen für  $S_1$  und  $S_2$
    - $P_1 = P \wedge B$  und  $P_2 = P \wedge \neg B$



- Zwei **alternative Programmsegmente**  $S_1$  und  $S_2$ 
  - Diese werden durch eine **Bedingung**  $B$  unterschieden
  - Eingangs gilt in beiden Zweigen die Vorbedingung  $P$ 
    - $P$  und  $B$  sind die Basis für die Vorbedingungen für  $S_1$  und  $S_2$
    - $P_1 = P \wedge B$  und  $P_2 = P \wedge \neg B$
  - Die Nachbedingung setzt sich aus denen für  $S_1$  und  $S_2$  zusammen



- Die Nachbedingungen  $Q_1$  und  $Q_2$  für  $S_1$  und  $S_2$  lassen sich mit den hier vorgestellten Regeln in Abhängigkeit von  $P_1$  und  $P_2$  ableiten
  - Ermöglicht eine Vorgehensweise nach dem Schema **Divide & Conquer**
  - Zerlege komplexer Programmsegmente betrachte sie einzeln
  
- Auswahlregel:

$$\frac{\{P \wedge B\} S_1 \{Q\} \quad \{P \wedge \neg B\} S_2 \{Q\}}{\{P\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \{Q\}}$$

- Wir möchten das Maximum über ein Feld aus Ganzzahlen bilden!
  - Ohne **Iteration** ist dies bei einer unbekanntem Feldgröße nicht möglich
    - Rekursion wäre natürlich eine Lösung, die ohne Iteration auskommt
    - Sie ist jedoch mit denselben Problemen behaftet ...

```
1 int maximum_array(int *array,int size) {
2     int result = INT_MIN;
3
4     for(int i = 0;i < size;i++)
5         result = maximum(array[i],result);
6
7     return result;
8 }
```

# Iterationsregel

- Wir möchten das Maximum über ein Feld aus Ganzzahlen bilden!
  - Ohne **Iteration** ist dies bei einer unbekanntem Feldgröße nicht möglich
    - Rekursion wäre natürlich eine Lösung, die ohne Iteration auskommt
    - Sie ist jedoch mit denselben Problemen behaftet ...

```
1 int maximum_array(int *array,int size) {
2     int result = INT_MIN;
3
4     for(int i = 0;i < size;i++)
5         result = maximum(array[i],result);
6
7     return result;
8 }
```

- Iterationsregel:

$$\frac{\{I \wedge B\} S \{I\}}{\{I\} \mathbf{while} B \mathbf{do} S \mathbf{done} \{I \wedge \neg B\}}$$

- $B$  ist die **Laufbedingung** der Schleife,  $I$  ihre **Schleifeninvariante**
  - $I$  gilt **vor**, **während** und **nach** der Ausführung der Schleife
  - Ein geeignetes  $I$  ist **manuell zu wählen**



# Iterationsregel – Schleifeninvariante

```
 $S_0$  : int result = INT_MIN;
```

```
 $S_1$  : for(int i = 0; i < size; i++)
```

```
 $S_2$  : result = maximum(array[i], result);
```

- Wo gilt die Schleifeninvariante *I*?



# Iterationsregel – Schleifeninvariante

```
 $S_0$  : int result = INT_MIN;
```

```
 $P_1$  : /
```

```
 $S_1$  : for(int i = 0; i < size; i++)
```

```
 $S_2$  : result = maximum(array[i], result);
```

- Wo gilt die Schleifeninvariante /?
  - Vor der Ausführung der Schleife



```
S0 : int result = INT_MIN;
```

```
P1 : /
```

```
S1 : for(int i = 0; i < size; i++)
```

```
P2 : /
```

```
S2 : result = maximum(array[i], result);
```

```
Q2 : /
```

- **Wo gilt die Schleifeninvariante /?**
  - Vor der Ausführung der Schleife
  - Vor und nach Ausführung des Schleifenrumpfes

```
S0 : int result = INT_MIN;
```

```
P1 : /
```

```
S1 : for(int i = 0; i < size; i++)
```

```
P2 : /
```

```
S2 : result = maximum(array[i], result);
```

```
Q2 : /
```

```
Q3 : /
```

- **Wo gilt die Schleifeninvariante /?**
  - Vor der Ausführung der Schleife
  - Vor und nach Ausführung des Schleifenrumpfes
  - Nach Beendigung der Schleife



```
 $S_0$  : int result = INT_MIN;
```

```
 $P_1$  : I
```

```
 $S_1$  : for(int i = 0; i < size; i++)
```

```
 $P_2$  : I
```

```
 $S_2$  : result = maximum(array[i], result);
```

```
 $Q_2$  : I
```

```
 $Q_3$  : I
```

- Wie lautet die Schleifeninvariante *I*?
  - Eine explizit sichtbare **Laufvariable** hilft bei ihrer Formulierung
  - `result` enthält immer den größten, bereits betrachteten Wert

$S_0$  : `int result = INT_MIN;`

$P_1$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$S_1$  : `for(int i = 0; i < size; i++)`

$P_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$S_2$  : `result = maximum(array[i], result);`

$Q_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$Q_3$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

## ■ Wie lautet die Schleifeninvariante $I$ ?

- Eine explizit sichtbare **Laufvariable** hilft bei ihrer Formulierung
- `result` enthält immer den größten, bereits betrachteten Wert
- Schleifenbedingung  $I = \forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$



# Iterationsregel – Laufbedingung

$S_0$  : `int result = INT_MIN;`

$P_1$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$S_1$  : `for(int i = 0; i < size; i++)`

$P_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$S_2$  : `result = maximum(array[i], result);`

$Q_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$Q_3$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

- Wie lautet die Laufbedingung  $B$  der Schleife und wo gilt sie?



# Iterationsregel – Laufbedingung

$S_0$  : `int result = INT_MIN;`

$P_1$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge B$

$S_1$  : `for(int i = 0; i < size; i++)`

$P_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge B$

$S_2$  : `result = maximum(array[i], result);`

$Q_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$Q_3$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge \neg B$

- Wie lautet die Laufbedingung  $B$  der Schleife und wo gilt sie?
  - Sie gilt **vor** der Ausführung des Schleifenrumpfs
  - Sie gilt **nicht** mehr nach der Schleife



# Iterationsregel – Laufbedingung

$S_0$  : `int result = INT_MIN;`

$P_1$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge i = 0$

$S_1$  : `for(int i = 0; i < size; i++)`

$P_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge i < \text{size}$

$S_2$  : `result = maximum(array[i], result);`

$Q_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$Q_3$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge i \geq \text{size}$

- Wie lautet die Laufbedingung  $B$  der Schleife und wo gilt sie?
  - Sie gilt **vor** der Ausführung des Schleifenrumpfs
  - Sie gilt **nicht** mehr nach der Schleife
  - Sie lässt sich direkt aus der `for`-Anweisung ablesen  $\rightsquigarrow B = i < \text{size}$



# Iterationsregel – Verknüpfung

$P$  : wahr

$S_0$  : `int result = INT_MIN;`

$Q_1$  : `result = INT_MIN`



$P_1$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge i = 0$

$S_1$  : `for(int i = 0; i < size; i++)`

$P_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge i < \text{size}$

$S_2$  : `result = maximum(array[i], result);`

$Q_2$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j]$

$Q_3$  :  $\forall 0 \leq j < i : \text{result} \geq \text{array}[j] \wedge i \geq \text{size}$



$Q$  :  $\forall 0 \leq j < \text{size} : \text{result} \geq \text{array}[j]$

- Verknüpfung mithilfe der Sequenzregel (Folie 17)
  - $I$  folgt aus der Vorbedingung  $P$
  - $Q$  folgt aus dem Abbruchkriterium der Schleife  $I \wedge \neg B$



- **Vorgehen** beim Anwenden der Iterationsregel



## ■ Vorgehen beim Anwenden der Iterationsregel

### 1 Finde eine geeignete Schleifeninvariante $I$

- Häufig dient der zu berechnene **mathematische Term** als Invariante
- Die **Laufvariable** ist eine weitere Konstruktionshilfe
- Hilfreich ist dessen **geschlossene Darstellung**, falls sie existiert
- z. B. iterative Bestimmung der Fakultät, Fibonacci-Zahlen, ...



## ■ Vorgehen beim Anwenden der Iterationsregel

### 1 Finde eine geeignete Schleifeninvariante $I$

- Häufig dient der zu berechnene **mathematische Term** als Invariante
- Die **Laufvariable** ist eine weitere Konstruktionshilfe
- Hilfreich ist dessen **geschlossene Darstellung**, falls sie existiert
- z. B. iterative Bestimmung der Fakultät, Fibonacci-Zahlen, ...

### 2 Weise nach, dass $I$ aus der Vorbedingung $P$ folgt: $P \Rightarrow I$

- Im wesentlichen eine Anwendung der **Konsequenzregel** (s. Folie 23)



## ■ Vorgehen beim Anwenden der Iterationsregel

### 1 Finde eine geeignete Schleifeninvariante $I$

- Häufig dient der zu berechnene **mathematische Term** als Invariante
- Die **Laufvariable** ist eine weitere Konstruktionshilfe
- Hilfreich ist dessen **geschlossene Darstellung**, falls sie existiert
- z. B. iterative Bestimmung der Fakultät, Fibonacci-Zahlen, ...

### 2 Weise nach, dass $I$ aus der Vorbedingung $P$ folgt: $P \Rightarrow I$

- Im wesentlichen eine Anwendung der **Konsequenzregel** (s. Folie 23)

### 3 Zeige die Invarianz der Invariante: $\{P \wedge I\}S\{I\}$

- **Vollständige Induktion**, falls der Wertebereich der Laufvariable geeignet ist



## ■ Vorgehen beim Anwenden der Iterationsregel

### 1 Finde eine geeignete Schleifeninvariante $I$

- Häufig dient der zu berechnene **mathematische Term** als Invariante
- Die **Laufvariable** ist eine weitere Konstruktionshilfe
- Hilfreich ist dessen **geschlossene Darstellung**, falls sie existiert
- z. B. iterative Bestimmung der Fakultät, Fibonacci-Zahlen, ...

### 2 Weise nach, dass $I$ aus der Vorbedingung $P$ folgt: $P \Rightarrow I$

- Im wesentlichen eine Anwendung der **Konsequenzregel** (s. Folie 23)

### 3 Zeige die Invarianz der Invariante: $\{P \wedge I\} S \{I\}$

- **Vollständige Induktion**, falls der Wertebereich der Laufvariable geeignet ist

### 4 Beweise, dass die Invariante die Nachbedingung impliziert: $I \wedge \neg B \Rightarrow Q$

- Im wesentlichen eine Anwendung der **Konsequenzregel** (s. Folie 23)



# Konsequenzregel

- Manchmal ist eine Anpassung der Vor-/Nachbedingung erforderlich
  - z. B. aus technischen Gründen, falls die Vorbedingung  $P = \mathbf{wahr}$  ist
  - Ansonsten lässt sich keine sinnvolle Beweiskette aufbauen
- Formalisiert wird dies durch die **Konsequenzregel**

$$\frac{P \Rightarrow P' \quad \{P'\}S\{Q'\} \quad Q' \Rightarrow Q}{\{P\}S\{Q\}}$$

- $P'$  ist eine **Verstärkung** der Vorbedingung  $P$ 
  - Verstärkungen sind z. B. das Hinzufügen konjunktiv verknüpfter Terme, ...
- $Q'$  ist eine **Abschwächung** der Nachbedingung  $Q$ 
  - Abschwächungen sind invertierte Verstärkungen
- Die allgemeine Iterationsregel ist eine Anwendung hiervon

$$\frac{P \Rightarrow I \quad \{I\} \mathbf{while\ } B \mathbf{ do\ } S \mathbf{ done\ } \{I \wedge \neg B\} \quad I \wedge \neg B \Rightarrow Q}{\{P\} \mathbf{while\ } B \mathbf{ do\ } S \mathbf{ done\ } \{Q\}}$$





(©Hamilton Richards 2002)

- 1930 geboren in Rotterdam
- ab 1948 Studium an der Universität Leiden
- ab 1962 Mathematikprofessor in Eindhoven
- ab 1973 *Research Fellow* der Burroughs Corporation
- ab 1984 Informatikprofessor in Austin, Texas
- 1999 Emeritierung
- 2002 verstorben in Nuenen

## Auszeichnungen (Auszug)

- 1972 Turing Award
- 1982 Computer Pioneer Award
- 2002 Dijkstra-Preis

## bekannte Werke (Auszug)

- Dijkstra-Algorithmus [1]
- Semaphore [4]
- „GOTO considered harmful“ [2]

- Bestimmt die **schwächste notwendige Vorbedingung**  $wp(S, Q)$ 
  - Für ein gegebenes **imperatives Programmsegment**  $S$
  - Um die ebenfalls gegebene Nachbedingung  $Q$  sicherzustellen
  - Dieser Sachverhalt wird beschrieben durch:  $P \Rightarrow wp(S, Q)$ 
    - Lässt sich die schwächste notwendige Vorbedingung  $wp(S, Q)$  aus der gegebenen Vorbedingung  $P$  folgern?

- Bestimmt die **schwächste notwendige Vorbedingung**  $wp(S, Q)$ 
  - Für ein gegebenes **imperatives Programmsegment**  $S$
  - Um die ebenfalls gegebene Nachbedingung  $Q$  sicherzustellen
  - Dieser Sachverhalt wird beschrieben durch:  $P \Rightarrow wp(S, Q)$ 
    - Lässt sich die schwächste notwendige Vorbedingung  $wp(S, Q)$  aus der gegebenen Vorbedingung  $P$  folgern?
  
- Das WP-Kalkül ist eine **Rückwärtsanalyse**
  - Sie beginnt mit der Nachbedingung und durchläuft das Programmsegment in umgekehrter Reihenfolge
  - „Sozusagen“ umgekehrter Einsatz der Regeln des Hoare-Kalküls

- Bestimmt die **schwächste notwendige Vorbedingung**  $wp(S, Q)$ 
  - Für ein gegebenes **imperatives Programmsegment**  $S$
  - Um die ebenfalls gegebene Nachbedingung  $Q$  sicherzustellen
  - Dieser Sachverhalt wird beschrieben durch:  $P \Rightarrow wp(S, Q)$ 
    - Lässt sich die schwächste notwendige Vorbedingung  $wp(S, Q)$  aus der gegebenen Vorbedingung  $P$  folgern?
- Das WP-Kalkül ist eine **Rückwärtsanalyse**
  - Sie beginnt mit der Nachbedingung und durchläuft das Programmsegment in umgekehrter Reihenfolge
  - „Sozusagen“ umgekehrter Einsatz der Regeln des Hoare-Kalküls
- Jeder Anweisung wird eine **Prädikattransformation** zugewiesen
  - Abbildung: Nachbedingung  $\mapsto$  notwendige schwächste Vorbedingung
  - Eine rückwärtige **symbolisch Ausführung** des Programmsegments

# Axiome und Sequenzregel

Die restlichen Regeln gleichen ebenfalls denen des Hoare-Kalküls

- Axiome für die Anweisungen **skip** und **abort**

$$wp(\mathbf{skip}, Q) = \mathbf{wahr}$$

$$wp(\mathbf{abort}, Q) = \mathbf{falsch}$$

- **skip** ist die leere Anweisung, **abort** schlägt immer fehl

- Zuweisungsaxiom

$$wp(x = y, Q) = Q[x/y]$$

- In der Nachbedingung ersetzt man alle freien Vorkommen von  $x$  durch  $y$ 
  - Dualität von WP-Kalkül und Hoare-Kalkül ist offensichtlich
  - Im Hoare-Kalkül (s. Folie 16) wird  $y$  in der Vorbedingung durch  $x$  ersetzt

- Sequenzregel

$$wp(S_1; S_2, Q) = wp(S_1, wp(S_2, Q))$$

- Die schwächste Vorbedingung  $wp(S_2, Q)$  dient als Nachbedingung für  $S_1$ 
  - Auch hier ist die Verwandtschaft zum Hoare-Kalkül unverkennbar
  - Dort war  $sp(S_1, P)$  die Vorbedingung für  $S_2$  (s. Folie 17)



- Betrachte erneut das Beispiel von Folie 15
  - Diesmal in leicht abgewandelter Form

$P$ : wahr

```
S:int maximum(int a,int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return INT_MAX;  
}
```

$Q$ :  $result \geq a \wedge result \geq b$

- Betrachte erneut das Beispiel von Folie 15
  - Diesmal in leicht abgewandelter Form

```
P : wahr
```

```
S : int maximum(int a, int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return INT_MAX;  
}
```

```
Q : result ≥ a ∧ result ≥ b
```

- Die Nachbedingung wird ohne Zweifel erfüllt ...
  - ... im Sinne des Erfinders ist dies jedoch bestimmt nicht

- Betrachte erneut das Beispiel von Folie 15
  - Diesmal in leicht abgewandelter Form

```
P : wahr  
S : int maximum(int a, int b) {  
    int result = INT_MIN;  
  
    if(a > b)  
        result = a;  
    else  
        result = b;  
  
    return INT_MAX;  
}  
Q : result ≥ a ∧ result ≥ b
```

- Die Nachbedingung wird ohne Zweifel erfüllt ...
  - ... im Sinne des Erfinders ist dies jedoch bestimmt nicht
- ☞ Die Nachbedingung ist **nicht stark genug**, sie ist **unvollständig**
  - Frage: Wann ist eine Nachbedingung vollständig?
  - Frage: Wie vollständig kann bzw. darf eine Nachbedingung sein?
    - Eine Frage, die sich nicht eindeutig und allgemein klären lässt

- Manches lässt sich mit Prädikatenlogik nicht gut beschreiben
  - Zeitliche Abfolgen: vor Funktion `foo()` muss `bar()` aufgerufen werden
    - Explizite Modellierung über Signalvariablen wird notwendig
  - Nebenläufigkeit und Synchronisation, Zeitschranken, ...

- Manches lässt sich mit Prädikatenlogik nicht gut beschreiben
    - Zeitliche Abfolgen: vor Funktion `foo()` muss `bar()` aufgerufen werden
      - Explizite Modellierung über Signalvariablen wird notwendig
    - Nebenläufigkeit und Synchronisation, Zeitschranken, ...
  
  - Prädikatenlogische Ausdrücke werden sehr schnell sehr komplex
    - Es kommen implizit Bedingungen durch die C-Semantik hinzu
      - Wertebereiche, Funktionsaufrufe, Parametersemantik, Zeigerarithmetik, ...
- ... etwaige Fehlermeldungen sind sehr schwer zu lesen

- Manches lässt sich mit Prädikatenlogik nicht gut beschreiben
  - Zeitliche Abfolgen: vor Funktion `foo()` muss `bar()` aufgerufen werden
    - Explizite Modellierung über Signalvariablen wird notwendig
  - Nebenläufigkeit und Synchronisation, Zeitschranken, ...
  
- Prädikatenlogische Ausdrücke werden sehr schnell sehr komplex
  - Es kommen implizit Bedingungen durch die C-Semantik hinzu
    - Wertebereiche, Funktionsaufrufe, Parametersemantik, Zeigerarithmetik, ...
  - ... etwaige Fehlermeldungen sind sehr schwer zu lesen
  
- Hier und heute wurden **nur partielle Korrektheitsbeweise** betrachtet!
  - **Terminierungsbeweise** müssen separat erbracht werden!
    - Solche Terminierungsbeweise sind mitunter **sehr schwierig!**

## 1 Grundlagen

## 2 Formale Spezifikation

- Hoare-Kalkül
- WP-Kalkül

## 3 Praktische Überlegungen

- Zusicherungen
- Funktionale Verifikation in Astreé
- Formale Verifikation von Betriebssystemen: seL4

## 4 Zusammenfassung



# Implementierung durch Zusicherungen $\mapsto$ assert()

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4  
5  
6     for(unsigned int i = 0;i < size;i++) {  
7  
8         temp += array[i];  
9     }  
10  
11     unsigned int result = temp/size;  
12  
13  
14     return result;  
15 }
```



# Implementierung durch Zusicherungen $\mapsto$ `assert()`

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     assert(size > 0);  
5  
6     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
7  
8         temp += array[i];  
9     }  
10  
11     unsigned int result = temp/size;  
12  
13  
14     return result;  
15 }
```

 **Vorbedingungen** lassen sich durch `assert`-Anweisungen prüfen



# Implementierung durch Zusicherungen $\mapsto$ assert()

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     assert(size > 0);  
5  
6     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
7         assert(temp <= ULONG_MAX - array[i]);  
8         temp += array[i];  
9     }  
10  
11     unsigned int result = temp/size;  
12  
13  
14     return result;  
15 }
```

 **Vorbedingungen** lassen sich durch assert-Anweisungen prüfen

- Auch (**Schleifen**)**invarianten** lassen sich so handhaben



# Implementierung durch Zusicherungen $\mapsto$ assert()

```
1 unsigned int average(unsigned int *array,  
2                     unsigned int size) {  
3     unsigned long long temp = 0;  
4     assert(size > 0);  
5  
6     for(unsigned int i = 0; i < size; i++) {  
7         assert(temp <= ULONG_MAX - array[i]);  
8         temp += array[i];  
9     }  
10  
11     unsigned int result = temp/size;  
12     assert(result == average_2(array, size));  
13  
14     return result;  
15 }
```

 **Vorbedingungen** lassen sich durch assert-Anweisungen prüfen

- Auch (**Schleifen**)**invarianten** lassen sich so handhaben

 **Problematisch** sind vor allem **Nachbedingungen**

- Nachbedingungen werden **deklarativ beschrieben**
- In assert-Anweisung wird der Wert typischerweise **explizit konstruiert**
- Begrenzungen sind identisch zu klassischen Tests

→ Sinnvoll, um das Vorhandensein von Defekten zu demonstrieren!



- Astreé wurde entwickelt um **Laufzeitfehler** auszuschließen
  - Basierend auf abstrakter Interpretation und Programmsemantik
  - Nutzt das Hoare-/WP-Kalkül **nicht**: Astreé nicht deklarativ
  - Funktionale Verifikation ist **unvollständig**

- Astreé wurde entwickelt um **Laufzeitfehler** auszuschließen
  - Basierend auf abstrakter Interpretation und Programmsemantik
  - Nutzt das Hoare-/WP-Kalkül **nicht**: Astreé nicht deklarativ
  - Funktionale Verifikation ist **unvollständig**

```
1 __ASTREE_max_clock((65535)); // Schleifenobergrenze
2 while (1) {
3     __ASTREE_modify((input)); // Reset der Analyse von 'input'
4     __ASTREE_known_fact((input, [0,100])); // Vorbedingung 'input'
5
6     controller_step();
7
8     // Nachbedingung 'output'
9     __ASTREE_assert((0 <= output && output <= 2 * input));
10    __ASTREE_wait_for_clock(());
11 }
```

- Funktionale Aspekte lassen sich dennoch in die Analyse einbeziehen
  - Mittels **Zusicherungen** und **Anwendungswissen** (vgl. Folie 30)
  - Der theoretische Hintergrund erleichtert auch hier die Suche!



- Astreé wurde entwickelt um **Laufzeitfehler** auszuschließen
  - Basierend auf abstrakter Interpretation und Programmsemantik
  - Nutzt das Hoare-/WP-Kalkül **nicht**: Astreé nicht deklarativ
  - Funktionale Verifikation ist **unvollständig**

```
1 __ASTREE_max_clock((65535)); // Schleifenobergrenze
2 while (1) {
3   __ASTREE_modify((input)); // Reset der Analyse von 'input'
4   __ASTREE_known_fact((input, [0,100])); // Vorbedingung 'input'
5
6   controller_step();
7
8   // Nachbedingung 'output'
9   __ASTREE_assert((0 <= output && output <= 2 * input));
10  __ASTREE_wait_for_clock(());
11 }
```

- Funktionale Aspekte lassen sich dennoch in die Analyse einbeziehen
    - Mittels **Zusicherungen** und **Anwendungswissen** (vgl. Folie 30)
    - Der theoretische Hintergrund erleichtert auch hier die Suche!
- **Holistischer Verifikationsansatz erfordert weitere Werkzeuge (Coq, Isabelle)**



```
1 int main()
2 {
3   unsigned int flag = 0;
4   float x=0.0, y=0.0;
5
6   for (unsigned int i = 0, i<10, i++) {
7     if (flag) {
8       x += x/y;
9     } else {
10      flag = 1; x = 1.0; y = 2.0;
11    }
12  }
13 }
```

- Pfadpräfixe (s. VIII/31 ff) abstrahieren von den Schleifendurchläufen
  - Der Schleifenrumpf wird im Extremfall auf einen Pfad reduziert
  - $i = [0, 9]$ ,  $flag = [0, 1]$ ,  $y = [0, 2.0]$



```
1 int main()
2 {
3   unsigned int flag = 0;
4   float x=0.0, y=0.0;
5
6   for (unsigned int i = 0, i<10, i++) {
7     if (flag) {
8       x += x/y;
9     } else {
10      flag = 1; x = 1.0; y = 2.0;
11    }
12  }
13 }
```

■ Pfadpräfixe (s. VIII/31 ff) abstrahieren von den Schleifendurchläufen

- Der Schleifenrumpf wird im Extremfall auf einen Pfad reduziert
- $i = [0, 9]$ ,  $flag = [0, 1]$ ,  $y = [0, 2.0]$



Ausrollen liefert zusätzliche Informationen

- Unterscheidung in ersten und zweiten Durchlauf verhindert den Fehlalarm
- **1)**  $i = 0$ ,  $flag = 0$  **2)**  $i = [1, 9]$ ,  $flag = 1$ ,  $y = 2.0$
- Erhöht jedoch die Kosten dramatisch (vgl. Pfadabdeckung VII/16)



## Beispiel: Partitionierung

```
1 unsigned int foo(int cond) {  
2     if (cond) {  
3         x = 10;  
4         y = 5;  
5     } else {  
6         x = 20;  
7         y = 16;  
8     }  
9     return x - y;  
10 }
```

- Sammelsemantik (s. VIII/25 ff) fasst Pfade zusammen
  - Hier kann der Unterlauf nicht ausgeschlossen werden
  - Rückgabewert =  $[-6, 15]$



# Beispiel: Partitionierung

```
1 unsigned int foo(int cond) {  
2     if (cond) {  
3         x = 10;  
4         y = 5;  
5     } else {  
6         x = 20;  
7         y = 16;  
8     }  
9     return x - y;  
10 }
```

- Sammelsemantik (s. VIII/25 ff) fasst Pfade zusammen
  - Hier kann der Unterlauf nicht ausgeschlossen werden
  - Rückgabewert =  $[-6, 15]$



## Selektive Partitionierung des Kontrollflusses

- Weist die Analyse an, Pfade getrennt zu verfolgen
- **cond**: Rückgabewert = 5, **!cond**: Rückgabewert = 4
- Wiederrum auf Kosten der Komplexität



*The binary code of the seL4 microkernel correctly implements the behaviour described in its abstract specification and nothing more. Furthermore, the specification and the seL4 binary satisfy the classic security properties called integrity and confidentiality.*

- Interaktiver Theorembeweiser: Isabelle (ähnlich Coq)
- Annahmen
  - Korrektheit von Boot Code und Assembler (z.B. Kontext-Wechsel)
  - Korrekte Funktionsweise der Hardware (keine Bitkipper)
- Zwei zentrale Beweise
  - 1 Korrektheit von Haskell-Implementierung
  - 2 Überführung von Haskell- in C-Implementierung
- Umfang: 8700 Zeilen Implementierungscode, 200000 Zeilen Beweiscode
- Enormer Aufwand: **20 Personenjahre Entwicklungsarbeit**



## 1 Grundlagen

## 2 Formale Spezifikation

- Hoare-Kalkül
- WP-Kalkül

## 3 Praktische Überlegungen

- Zusicherungen
- Funktionale Verifikation in Astreé
- Formale Verifikation von Betriebssystemen: seL4

## 4 Zusammenfassung



Funktionale Programmeigenschaften  $\mapsto$  Zusicherungen

- Vorbedingungen, Nachbedingungen und Invarianten
- Beschrieben durch Ausdrücke der Prädikatenlogik
- **Prädikamentransformation**  $\rightsquigarrow$  symbolische Ausführung
  - Bildet Semantik durch Transformation von Zusicherungen nach
  - **Strongest postcondition, weakest precondition**

Hoare-Kalkül  $\rightsquigarrow$  deduktive Ableitung von Nachbedingungen

- **Hoare-Tripel**, Axiome für leere Anweisungen und Zuweisungen
- **Ableitungsregeln** für Sequenzen, Verzweigungen und Iterationen
- **WP-Kalkül**  $\mapsto$  „Hoare-Kalkül rückwärts“
- Grenzen des Hoare- und WP-Kalküls

**Astreé**  $\rightsquigarrow$  Ein Verifikationswerkzeug

- Vorrangig zum Ausschluss von **Laufzeitfehlern** (vollständig)
  - Verifikation funktionaler Aspekte möglich (unvollständig)
- $\rightarrow$  Bottom-up Ansatz (im Gegensatz zu Frama-C, Ada Spark, ...)

- [1] Dijkstra, E. W.:  
A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.  
In: *Numerische Mathematik* 1 (1959), Dez., S. 269–271
  
- [2] Dijkstra, E. W.:  
Letters to the editor: go to statement considered harmful.  
In: *Communications of the ACM* 11 (1968), März, Nr. 3, S. 147–148.  
<http://dx.doi.org/10.1145/362929.362947>. –  
DOI 10.1145/362929.362947. –  
ISSN 0001–0782
  
- [3] Dijkstra, E. W.:  
Guarded commands, nondeterminacy and formal derivation of programs.  
In: *Communications of the ACM* 18 (1975), Aug., Nr. 8, S. 453–457.  
<http://dx.doi.org/10.1145/360933.360975>. –  
DOI 10.1145/360933.360975. –  
ISSN 0001–0782

- [4] Dijkstra, E. W.:  
Cooperating Sequential Processes / Technische Universiteit Eindhoven.  
Version: 1965.  
<https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd01xx/EWD123.PDF>.  
Eindhoven, The Netherlands, 1965. –  
Forschungsbericht. –  
(Reprinted in *Great Papers in Computer Science*, P. Laplante, ed., IEEE Press, New York, NY, 1996)
- [5] Hoare, C. A. R.:  
Algorithm 64: Quicksort.  
In: *Communications of the ACM* 4 (1961), Jul., Nr. 7, S. 321–.  
<http://dx.doi.org/10.1145/366622.366644>. –  
DOI 10.1145/366622.366644. –  
ISSN 0001–0782
- [6] Hoare, C. A. R.:  
An axiomatic basis for computer programming.  
In: *Communications of the ACM* 12 (1969), Okt., Nr. 10, S. 576–580.  
<http://dx.doi.org/10.1145/363235.363259>. –  
DOI 10.1145/363235.363259. –  
ISSN 0001–0782

- [7] Hoare, C. A. R.:  
Communicating Sequential Processes.  
In: *Communications of the ACM* 21 (1978), Aug., Nr. 8, S. 666–677.  
<http://dx.doi.org/10.1145/359576.359585>. –  
DOI 10.1145/359576.359585
- [8] Hofstadter, D. R.:  
*Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*.  
Basic Books, 1999. –  
824 S. –  
ISBN 978–0465026562
- [9] Klein, G. ; Elphinstone, K. ; Heiser, G. ; Andronick, J. ; Cock, D. ; Derrin, P. ; Elkaduwe, D. ;  
Engelhardt, K. ; Kolanski, R. ; Norrish, M. u. a.:  
seL4: Formal verification of an OS kernel.  
In: *Proceedings of the ACM SIGOPS 22nd Symposium on Operating Systems Principles ACM*,  
2009, S. 207–220